

Received:
August 3, 2020

Accepted:
October 13, 2020

Published:
November 1, 2020

Fourier Series solutions for deflection analysis on simply supported beams subjected to distributed loads

Daniel Tanure Franco Dutra¹ , Carlos Alberto Mirez Tarrillo¹ , Zenon José Guzman del Prado² 

¹ Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Teófilo Otoni, Brasil.

² Universidade Federal de Goiás, Goiânia, Brasil.

Email address

daniel.tanure@ufvjm.edu.br (Daniel T.F. Dutra) – Corresponding author.

carlos.mirez@ufvjm.edu.br (Carlos A.M. Tarrillo)

zenon@ufg.br (Zenon J.G. Prado)

Abstract

This article presents a study of the Fourier Series Method in the one-dimensional analysis of the elastic line and bending moment of a simply supported beam submitted to a distributed load. The analysis of deformation is an important procedure in Structural Engineering. The method was applied to three different types of distributed loads: one uniform and two triangular. The results were obtained from the representation of the elastic line of a beam simply supported through a Fourier Series. From the manipulation of beam equations and Fourier Series, graphs with different amounts of terms were plotted in the Series for deflection, bending moment and loading. These graphs were more clearly represented through tables. Evaluating the method, by comparing with the analytical method of successive integrations, it was concluded that the Fourier Series method provides very satisfactory results in the deflection analysis of this type of beams.

Keywords: Structures, Beams, Differential equations, Fourier series.

1. Introdução

Segundo Timoshenko (1967), ao se projetar uma viga, é necessário ao engenheiro atenção à deformação (deflexão) que as cargas atuantes produzem nela. A deflexão pode ser definida como o deslocamento sofrido por qualquer ponto no eixo da viga. A deformação limite em projetos estruturais é, normalmente, definida como uma pequena parte do vão.

As forças transversais agem no plano de simetria, ocasionando a flexão. Após a flexão, cada ponto do eixo de uma viga sofre uma deformação, que podem ser representadas ao longo de todo o comprimento da viga através de uma curva denominada “linha elástica”. (Hibbeler, 2010) define linha elástica como “diagrama da deflexão do eixo longitudinal que passa pelo centroide de cada área da seção transversal da viga”. Também surge um ângulo de inclinação, que representa a rotação da linha elástica em relação à linha horizontal. A Figura (1), logo a seguir, demonstra o

comportamento do eixo de uma viga submetida a um carregamento uniformemente distribuído, bem como o seu ângulo de rotação.

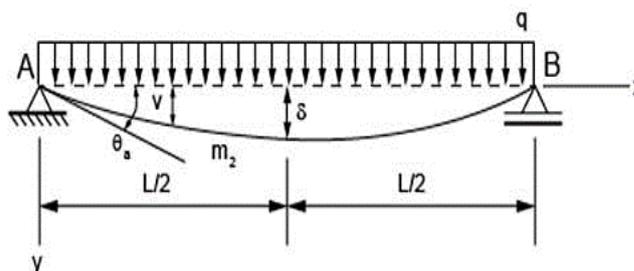


Figura 1 – Linha elástica de uma viga simplesmente apoiada com carregamento uniformemente distribuído.

A equação que rege a linha elástica de uma viga submetida à flexão pode ser representada por meio de uma série trigonométrica, com várias aplicações: desde estudo de vigas submetidas à flexão e carregamento axial, à análise de vibrações em vigas (Pereira e Tomazini, 2002). Essas séries podem ser associadas às propriedades das Séries de

Fourier, com a vantagem de uma única expressão poder ser aplicada ao longo de todo o comprimento da viga.

1.1 Séries de Fourier

Segundo Tang (2006), afirma que “a Série de Fourier é uma das ferramentas mais úteis da análise matemática, presente em quase todos os campos das Ciências Físicas”. Elas possuem esse nome devido ao físico matemático francês Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830).

Em 1822, Fourier, em seu trabalho sobre fluxo de calor, fez uma importante afirmação: de que toda função $f(x)$ com o período 2π pode ser representada por uma série infinita de senos e cossenos, conforme a Equação (1).

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \quad (1)$$

Uma série infinita dessa forma é chamada de Série de Fourier. As séries foram propostas originalmente para a solução de equações diferenciais com condições de contorno definidas. Embora seja ainda um dos métodos mais poderosos para a resolução de tais problemas, sua utilidade tem sido ampliada muito além do problema de condução de calor. Atualmente, é uma ferramenta essencial para a análise de todos os tipos de forma de onda, desde processamento de sinais a ondas de partículas quânticas (Tang, 2006).

“As séries de Fourier são uma ferramenta básica para resolver Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) e Equações Diferenciais Parciais (EDPs) com condições de contorno periódicas.” (Arfken; Weber, 2007).

Sendo assim, qualquer função “suficientemente regular” pode ser representada como uma combinação linear de uma função trigonométrica (senos e cossenos). Desta forma, segundo Castro (2001), “é possível exprimir as cargas distribuídas aplicadas na estrutura como combinações lineares de cargas sinusoidais”. A solução pretendida é composta pela combinação linear das soluções individuais obtidas.

Este estudo pretende estudar a linha elástica de uma viga simplesmente apoiada (ou seja, uma linha elástica com uma função “suficientemente regular”), bem como seus campos de momento fletor e carregamento, através de Séries de Fourier. Com isso pretende-se demonstrar que a utilização dessas séries trigonométricas são uma excelente

ferramenta para a determinação de deflexão em estruturas.

2. Metodologia

O cálculo da linha elástica se baseia na equação da viga (Timoshenko, 1967). A saber:

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = q \quad (2)$$

onde v é a deflexão; q é o carregamento; E é o módulo de elasticidade do material e I é o momento de inércia.

A partir da Equação (2) chega-se nas seguintes equações:

$$EI \frac{d^3 v}{dx^3} = -V \quad (3)$$

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = -M \quad (4)$$

$$EI \frac{dv}{dx} = \theta \quad (5)$$

onde V é o esforço cortante; M é o momento fletor e θ é o ângulo de rotação da viga.

As condições de contorno (CC) são as condições impostas à viga pelos seus apoios, e determinam as constantes de integração (Beer, 2011). A Figura (2) a seguir fornece uma representação gráfica das condições de contorno de alguns apoios possíveis de uma viga: apoio fixo, livre e simplesmente apoiada, respectivamente.

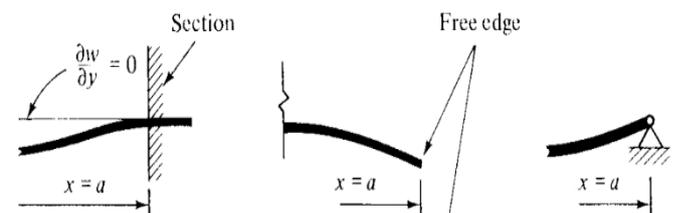


Figura 2 – Representação de apoios em vigas (Adaptado de Szilard, 2004).

Para uma viga simplesmente apoiada, como a Figura (1), as CC são:

$$v(0) = 0 \quad (CC1)$$

$$v(L) = 0 \quad (CC2)$$

$$v''(0) = 0 \quad (CC3)$$

$$v''(L) = 0 \quad (CC4)$$

2.1. Método das Séries de Fourier

Uma abordagem para análise de vigas é a representação da deflexão como uma Série de Fourier, que é capaz de representar funções de valor único com um número finito de descontinuidades finitas; depois disso, diferenciar por meio das Equações (2-5) e parar em algum nível onde os coeficientes de Fourier possam ser avaliados (Budynas e Nisbett, 2016).

Considere então que a curva de deflexão de uma viga de comprimento “L” simplesmente apoiada seja representada por uma Série de Fourier do tipo:

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \quad (6)$$

A Equação (6) considera como curva de deflexão para a viga a superposição de curvas senoidais com n diferentes configurações. Quanto maior o valor de n, mais precisa é a série.

Utilizando-se das condições de contorno [CC1-CC4] e da Equação (6), pode-se calcular a quarta derivada de v(x).

$$v^{iv}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 b_n \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \quad (7)$$

3. Resultados

Nessa seção, a metodologia foi aplicada em vigas simplesmente apoiadas, submetidas a três tipos de carregamentos distintos:

- a) O carregamento uniformemente distribuído;
- b) O carregamento distribuído triangular variando de x = 0 a x = L, e;
- c) O carregamento distribuído triangular variando de x = L a x = 0.

3.1 Carregamento uniformemente distribuído

Considere uma viga simplesmente apoiada, de comprimento “L”, submetida a um carregamento uniformemente distribuído “q(x)” conforme a Figura (3).

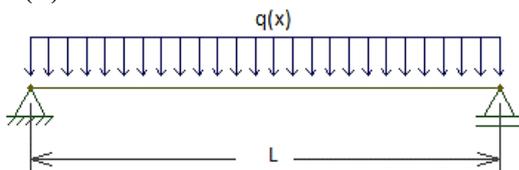


Figura 3 – Viga simplesmente apoiada submetida a um carregamento uniformemente distribuído.

Inserindo a Equação (7) na Equação (2), obtêm-se a Equação (8).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 b_n \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) = \frac{q(x)}{EI} \quad (8)$$

A Série de Fourier de q(x) (carregamento uniformemente distribuído) é descrita pela Equação (6), então temos que

$$q = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(x) \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \quad (9)$$

Se q(x)=q, então:

$$q_n = \frac{2}{L} \int_0^L q \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx = \frac{2}{L} \left[-\frac{Lq}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \right]_0^L$$

$$q_n = \frac{2}{L} \left[-\frac{Lq}{n\pi} \cos n\pi - \frac{Lq}{n\pi} \right] = \frac{2}{L} \left[-\frac{Lq}{n\pi} (\cos n\pi - 1) \right]$$

$$q_n \frac{2q}{n\pi} = (\cos n\pi - 1) = -\frac{2q}{n\pi} [(-1)^n - 1] \quad (10)$$

então, desde a Equação (10), tem-se

$$q_n = -\frac{2q}{n\pi} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} \frac{4q}{n\pi} & (n = \text{ímpar}) \\ 0 & (n = \text{par}) \end{cases} \quad (11)$$

Logo, a deflexão de uma viga simplesmente apoiada com um carregamento uniformemente distribuído, para qualquer valor de “n”, é dada pela série:

$$v(x) = \frac{4qL^4}{EI\pi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^5} \text{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi}{L} x \right) \quad (12)$$

De acordo com a Equação (4), a equação que rege os momentos fletores pode ser expressa conforme a seguir.

$$M(x) = EI \frac{4qL^4}{EI\pi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{(2n-1)\pi}{L} \right)^2}{(2n-1)^5} \text{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi}{L} x \right) \quad (13)$$

Da mesma maneira, conforme a Equação (2), o carregamento q(x) pode ser representado conforme a Equação (14) a seguir.

$$q(x) = EI \frac{4qL^4}{EI\pi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)L} \text{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi}{L} x \right) \quad (14)$$

Considerando L = q(x) = q = E = I = 1 na Equação (12) chega-se na Figura (4), que representa o campo de deslocamentos da viga analisada para diferentes valores de “n” na série de Fourier. A linha azul representa a série com um termo (n = 1)

e a linha amarela representa a série com dez termos ($n = 10$). Percebe-se que os gráficos praticamente se superpõem. O eixo “x” representa o comprimento “L” e o eixo “y” a deflexão da viga $v(x)$.

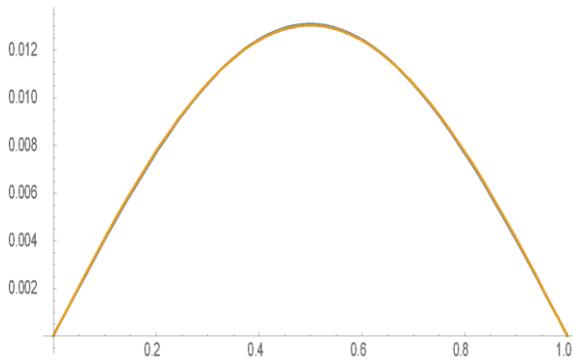


Figura 4 – Deflexão elástica $v(x)$ de uma viga simplesmente apoiada com carregamento uniformemente distribuído utilizando Série de Fourier.

A Figura (5) representa o campo de momento fletores $M(x)$ desde a Equação (13) para a viga analisada. A linha verde consideramos $n = 1$ termo; a linha vermelha $n = 2$ termos; a linha azul $n = 4$ termos; e a linha preta $n = 7$ termos na Série de Fourier. O eixo “x” representa o comprimento “L” e o eixo “y” o momento fletor “ $M(x)$ ” da viga.

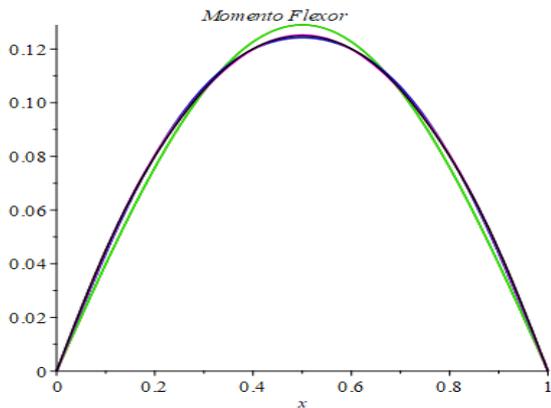
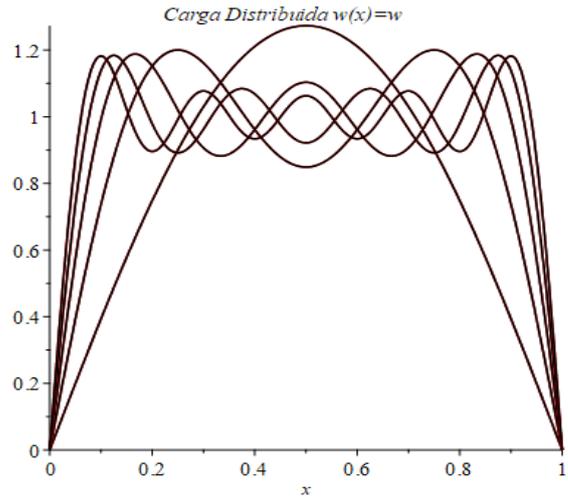


Figura 5 – Campo de momento fletor $M(x)$ de uma viga simplesmente apoiada com carregamento uniformemente distribuído utilizando Série de Fourier.

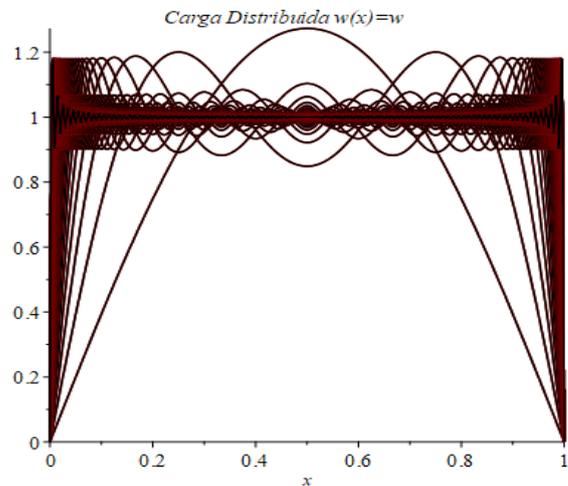
Apesar de muitos termos serem necessários para a representação da distribuição do carregamento, por tanto, os outros campos rapidamente convergiram numa solução apropriada.

Na Figura (6) a seguir apresentamos a distribuição do carregamento $q(x) = w$ desde a Equação (14) considerando o computo de mais termos na Série de Fourier. Os gráficos são para $n=10$ termos (dez), $n=50$ (cinquenta) termos e $n=200$ (duzentos) termos na Série de Fourier, respectivamente. O eixo “x” representa o

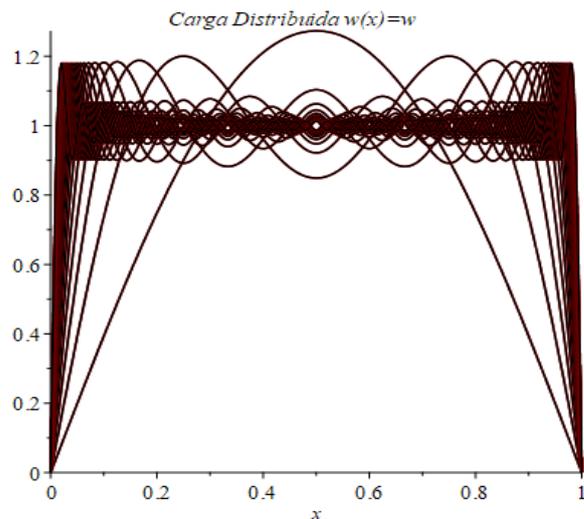
comprimento “L” da viga e o eixo “y” representa o carregamento uniformemente distribuído $q(x)$.



($n=10$ termos na Série de Fourier)



($n=50$ termos na Série de Fourier)



($n=200$ termos na Série de Fourier)

Figura 6 – Distribuição de carga $q(x) = w$ para uma viga simplesmente apoiada com um carregamento uniformemente distribuído utilizando Séries de Fourier.

Na Tabela (1) estão representados os valores numéricos da deflexão $v(x)$ para diferentes quantidades de termos na Série de Fourier (se $L = q = E = I = 1$).

Tabela 1 – Valores numéricos de deflexão $v(x)$ para diferentes valores de “x”, numa viga simplesmente apoiada submetida a um carregamento uniformemente distribuído utilizando diferentes quantidades de termos na Série de Fourier em comparação com a solução analítica exata.

x	n=1	n=10	n=50	Sol. Exata
0	0	0	0	0
0,2	0,00768297	0,0077333	0,0077333	0,0077333
0,5	0,0130711	0,0130208	0,0130208	0,0130208
0,7	0,0105747	0,0105747	0,010574	0,010574
1,0	0	0	0	0

Na Tabela (2) estão representados os valores do momento fletor $M(x)$ desde a Equação (13) para diferentes quantidades de termos na Série de Fourier (considerando $L = q = E = I = 1$).

Tabela 2 – Valores numéricos de momento fletor $M(x)$ para diferentes valores de “x”, numa viga simplesmente apoiada submetida a um carregamento uniformemente distribuído utilizando diferentes quantidades de termos na Série de Fourier em comparação com a solução analítica exata.

x	n=1	n=4	n=7	Sol. Exata
0	0	0	0	0
0,2	0,0758279	0,800144	0,800232	0,08
0,5	0,129006	0,124884	0,125023	0,125
0,7	0,104368	0,104929	0,104975	0,105
1,0	0	0	0	0

3.2 Carregamento Distribuído Triangular, variando $x = 0$ a $x = L$

Considere uma viga simplesmente apoiada, de comprimento “L”, submetida a um carregamento distribuído triangular “ $q(x)$ ” conforme a Figura (7).

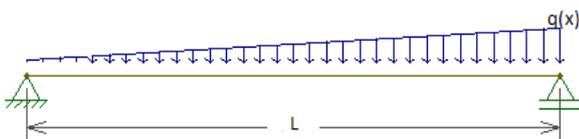


Figura 7 – Viga simplesmente apoiada submetida a um carregamento distribuído triangular $q(x)$, variando de $x=0$ a $x=L$.

Dessa forma, a equação da viga, conforme a Equação (2), será:

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = -\frac{q}{L} x \quad (15)$$

Inserindo a Equação (6) na Equação (15), obtêm-se a Equação (16).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 b_n \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x\right) = \frac{qx}{EI} \quad (16)$$

Redefinindo $q_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 b_n$, a série pode ser representada como a seguir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x\right) = \frac{qx}{EI} \quad (17)$$

Esta série é análoga à Equação (1), que é a forma geral para uma Série de Fourier. Dessa forma, segue que

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{2}{L} \int_0^L \frac{q}{L} x \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \\ &= \frac{2q}{L^2} \int_0^L x \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{2q}{L^2} \left[-\frac{L}{n\pi} x \cos \left(\frac{n\pi}{L} x\right) \right]_0^L = \frac{2q}{n\pi} \cos n\pi \\ &= \frac{2q}{n\pi} [-(-1)^n] \end{aligned} \quad (19)$$

$$q_n = \frac{2q}{n\pi} [-(-1)^n] = \begin{cases} \frac{2q}{n\pi} & (n = \text{ímpar}) \\ -\frac{2q}{n\pi} & (n = \text{par}) \end{cases} \quad (20)$$

Os valores do coeficiente b_n , então, são

$$b_n = \begin{cases} \frac{2qL^4}{EI(n\pi)^5} & (n = \text{ímpar}) \\ -\frac{2qL^4}{EI(n\pi)^5} & (n = \text{par}) \end{cases} \quad (21)$$

Pela Equação (6) obtêm-se o valor de deflexão da viga $v(x)$ para qualquer valor de “n” na Série de Fourier. A equação que rege a linha elástica da viga então é:

$$v(x) = \frac{2qL^4}{EI\pi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^5} \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (22)$$

Pelas equações (4) e (2) respectivamente, obtêm-se as séries referentes aos campos de momento fletor $M(x)$ e carregamento distribuído triangular $q(x)$, respectivamente, conforme a seguir.

$$M(x) = EI \frac{2qL^4}{EI\pi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}{n^5} \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (23)$$

$$q(x) = \frac{2qL^4}{EI\pi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4}{n^5} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (24)$$

Considerando $L = q(x) = q = E = I = 1$ na Equação (22) chega-se na Figura (8) que representa o campo de deslocamentos da viga $v(x)$ analisada para diferentes valores de “ n ” na Série de Fourier. A linha azul representa a série com um termo ($n = 1$) e a linha amarela representa a série com dez termos ($n = 10$) na série. Percebe-se que os gráficos praticamente se superpõem. O eixo “ x ” representa o comprimento “ L ” e o eixo “ y ” a deflexão $v(x)$ da viga.

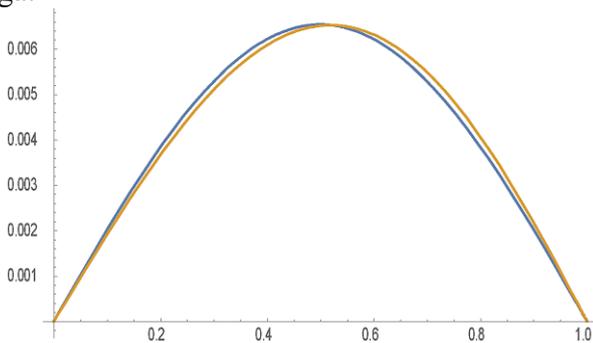


Figura 8 – Deflexão elástica $v(x)$ de uma viga simplesmente apoiada com carregamento distribuído triangular variando de $x=0$ a $x=L$ utilizando Série de Fourier.

A Figura (9) representa o campo de momento fletores $M(x)$ desde a Equação (23) para a viga analisada para diferentes valores de “ n ” na Série de Fourier. A linha verde considera um termo ($n = 1$); a linha vermelha $n = 2$ termos; a linha azul $n = 4$ termos; e a linha preta $n = 7$ termos na Série de Fourier. O eixo “ x ” representa o comprimento “ L ” e o eixo “ y ” o momento fletor $M(x)$ da viga.

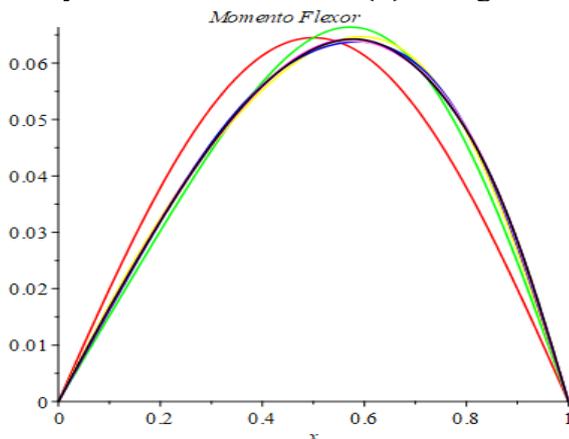
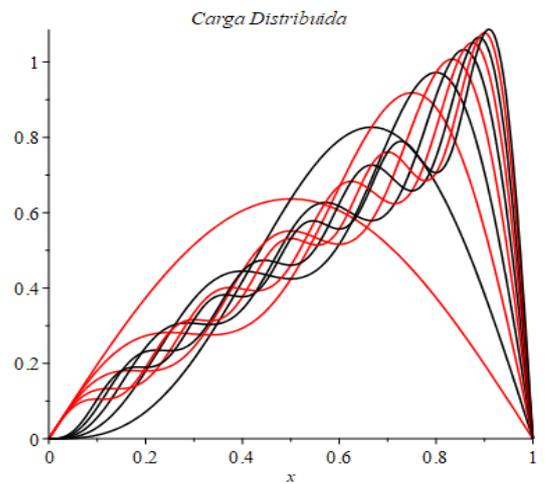


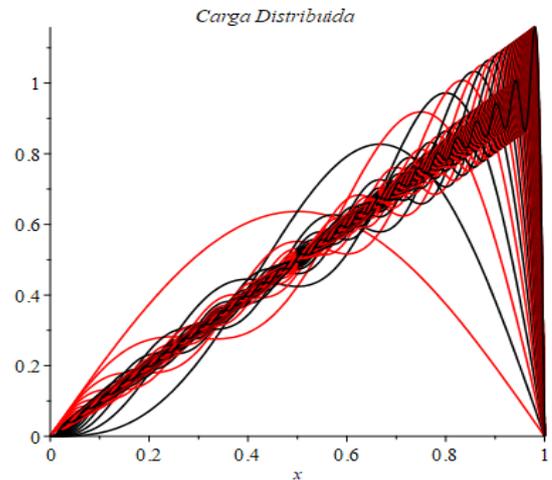
Figura 9 – Campo de momento fletor $M(x)$ de uma viga simplesmente apoiada com carregamento distribuído triangular variando de $x=0$ a $x=L$ utilizando Série de Fourier.

A Figura (10) representa a distribuição do carregamento $q(x)$ desde a Equação (24) para a viga analisada para diferentes valores de “ n ” na Série de

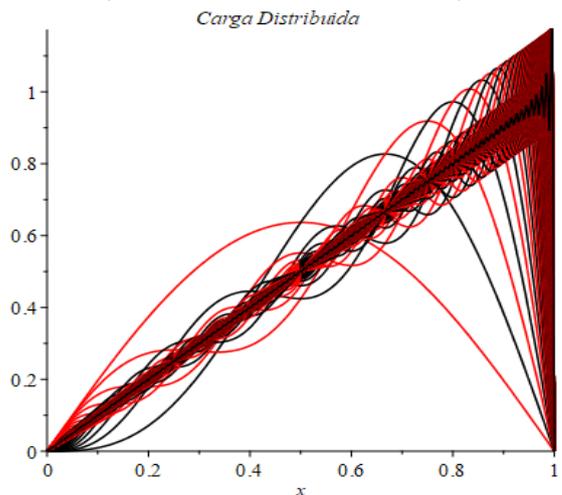
Fourier, considerando o computo de mais termos na Série de Fourier. Os gráficos são para $n=10$ (dez) termos, $n=50$ (cinquenta) termos e $n=200$ (duzentos) termos na Série de Fourier, respectivamente



($n=10$ termos na Série de Fourier)



($n=50$ termos na Série de Fourier)



($n=200$ termos na Série de Fourier)

Figura 10 – Distribuição de carga $q(x) = w$ para uma viga simplesmente apoiada com um carregamento distribuído triangular variando de $x=0$ a $x=L$ utilizando Séries de Fourier.

Na Tabela (3) estão representados os valores numéricos da deflexão $v(x)$ para diferentes quantidades de termos na Série de Fourier (se $L = q = E = I = 1$).

Tabela 3 – Valores numéricos de deflexão $v(x)$ para diferentes valores de “x”, numa viga simplesmente apoiada submetida a um carregamento distribuído triangular variando de $x=0$ a $x=L$ utilizando diferentes quantidades de termos na Série de Fourier em comparação com a solução analítica exata.

x	n=4	n=10	n=50	Sol. Exata
0	0	0	0	0
0,2	0,00366907	0,00366932	0,0036693	0,0036693
0,5	0,00650863	0,00651045	0,0065104	0,0065104
0,7	0,00548615	0,00548397	0,0054839	0,0054839
1,0	0	0	0	0

Na Tabela (4) estão representados os valores do momento fletor $M(x)$ desde a Equação (23) para diferentes quantidades de termos na Série de Fourier (considerando $L = q = E = I = 1$).

Tabela 4 – Valores numéricos de momento fletor $M(x)$ para diferentes valores de “x”, numa viga simplesmente apoiada submetida a um carregamento distribuído triangular variando de $x=0$ a $x=L$ utilizando diferentes quantidades de termos na Série de Fourier em comparação com a solução analítica exata.

x	n=1	n=4	n=7	Sol. Exata
0	0	0	0	0
0,2	0,037914	0,0319254	0,031922	0,032
0,5	0,0645031	0,0621141	0,062442	0,0625
0,7	0,0521841	0,0599982	0,0593647	0,0594999
1,0	0	0	0	0

3.3 Carregamento Distribuído Triangular, variando $x = L$ a $x = 0$

Considere uma viga simplesmente apoiada, de comprimento “L”, submetida a um carregamento distribuído triangular “ $q(x)$ ”, variando de $x=L$ a $x=0$, conforme a Figura (11).

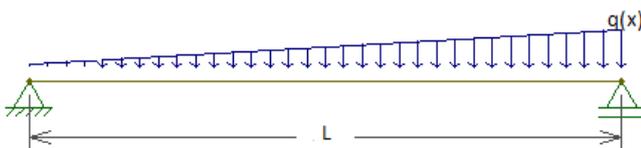


Figura 11 – Viga simplesmente apoiada submetida a um carregamento distribuído triangular $q(x)$, variando de $x=L$ a $x=0$.

Dessa forma, a equação da viga, conforme a Equação (2), será:

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = q \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (25)$$

Inserindo a Equação (6) na Equação (25), obtêm-se a Equação (26).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 b_n \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \frac{q}{EI} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (26)$$

Redefinindo $q_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 b_n$, a série pode ser representada como a seguir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \frac{q}{EI} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (27)$$

Esta série também é análoga à Equação (1), que é a forma geral para uma Série de Fourier. Dessa forma, segue que

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{2}{L} \int_0^L q \left(1 - \frac{x}{L}\right) \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\ &= \frac{2q}{L} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \end{aligned}$$

$$q_n = \frac{2q}{L} \frac{L}{(n\pi)^2} [n\pi - \text{sen}n\pi] = \frac{2q}{n\pi} \quad (28)$$

Os valores do coeficiente b_n , então, são

$$b_n = \frac{2qL^4}{EI(n\pi)^5}; \quad n = 1, 2, 3 \quad (29)$$

Pela Equação (29) na Equação (6) obtêm-se o valor de deflexão da viga $v(x)$ para qualquer valor de “n” na Série de Fourier. A equação que rege a linha elástica da viga então é:

$$v(x) = \frac{2qL^4}{EI\pi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (30)$$

Pelas equações (4) e (2) respectivamente, obtêm-se as séries referentes aos campos de momento fletor $M(x)$ e carregamento distribuído triangular $q(x)$, respectivamente, conforme a seguir.

$$M(x) = EI \frac{2qL^4}{EI\pi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}{n^5} \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (31)$$

$$q(x) = \frac{2qL^4}{EI\pi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4}{n^5} \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (32)$$

Considerando $L = q(x) = q = E = I = 1$ na Equação (30) chega-se na Figura (12) que representa o campo de deslocamentos da viga $v(x)$

analisada para diferentes valores de “ n ” na Série de Fourier. A linha azul representa a série com um termo ($n = 1$) e a linha amarela representa a série com dez termos ($n = 10$) na série. Percebe-se que os gráficos praticamente se superpõem. O eixo “ x ” representa o comprimento “ L ” e o eixo “ y ” a deflexão $v(x)$ da viga.

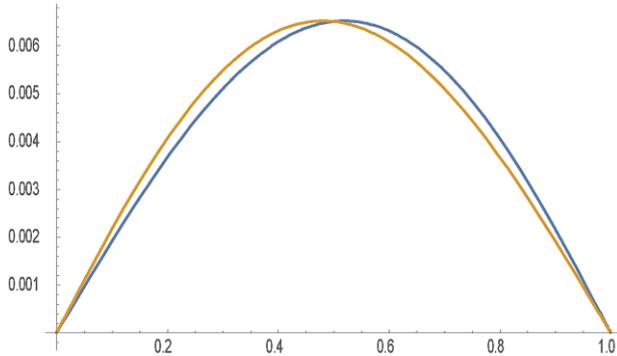


Figura 12 – Deflexão elástica $v(x)$ de uma viga simplesmente apoiada com carregamento distribuído triangular variando de $x=L$ a $x=0$ utilizando Série de Fourier.

A Figura (13) representa o campo de momento fletores $M(x)$ desde a Equação (31) para a viga analisada para diferentes valores de “ n ” na Série de Fourier. A linha verde considera um termo ($n = 1$); a linha vermelha $n = 2$ termos; a linha azul $n = 4$ termos; e a linha preta $n = 7$ termos na Série de Fourier. O eixo “ x ” representa o comprimento “ L ” e o eixo “ y ” o momento fletor $M(x)$ da viga.

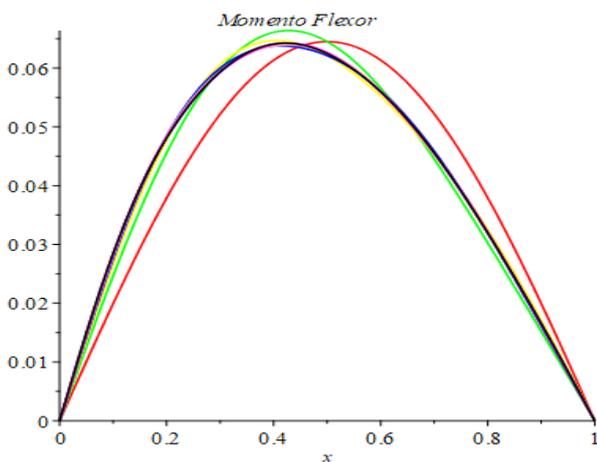
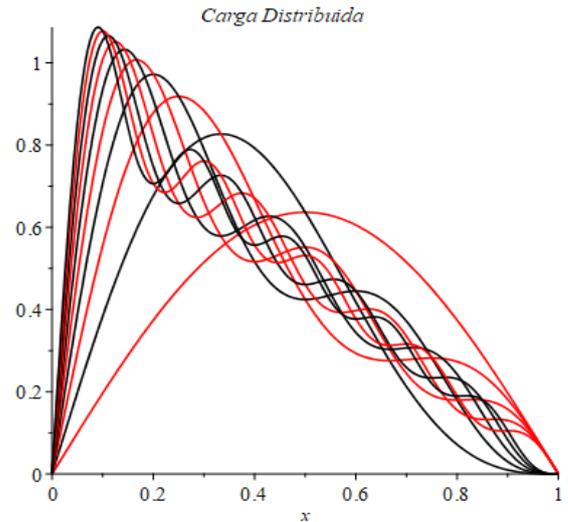


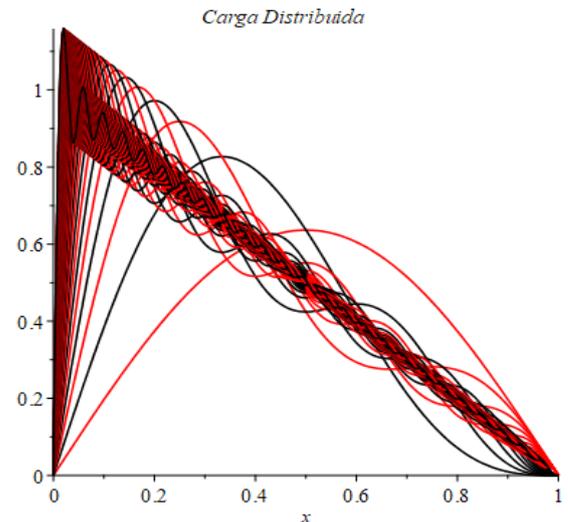
Figura 13 – Campo de momento fletor $M(x)$ de uma viga simplesmente apoiada com carregamento distribuído triangular variando de $x=L$ a $x=0$ utilizando Série de Fourier.

A Figura (14) representa a distribuição do carregamento $q(x)$ desde a Equação (32) para a viga analisada para diferentes valores de “ n ” na Série de Fourier, considerando o computo de mais termos na Série de Fourier. Os gráficos são para $n=10$ (dez) termos, $n=50$ (cinquenta) termos e $n=200$

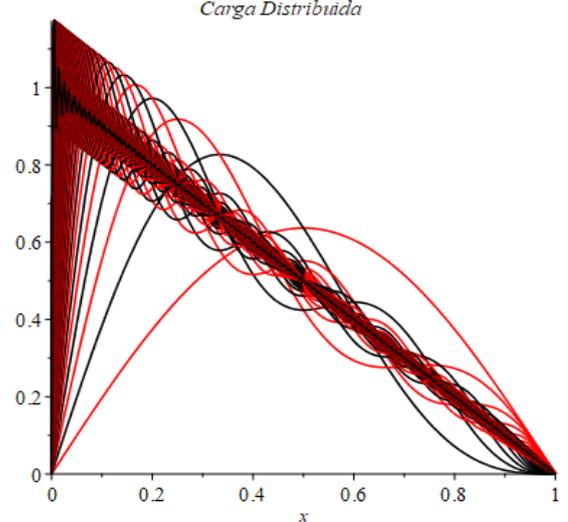
(duzentos) termos na Série de Fourier, respectivamente



($n=10$ termos na Série de Fourier)



($n=50$ termos na Série de Fourier)



($n=200$ termos na Série de Fourier)

Figura 14 – Distribuição de carga $q(x) = w$ para uma viga simplesmente apoiada com um carregamento distribuído triangular variando de $x=L$ a $x=0$ utilizando Séries de Fourier.

Na Tabela (5) estão representados os valores numéricos da deflexão $v(x)$ para diferentes quantidades de termos na Série de Fourier (se $L = q = E = I = 1$).

Tabela 5 – Valores numéricos de deflexão $v(x)$ para diferentes valores de “x”, numa viga simplesmente apoiada submetida a um carregamento distribuído triangular variando de $x=L$ a $x=0$ utilizando diferentes quantidades de termos na Série de Fourier em comparação com a solução analítica exata.

x	n=4	n=10	n=50	Sol. Exata
0	0	0	0	0
0,2	0,0040650	0,00406394	0,004064	0,004064
0,5	0,0065086	0,0065104	0,0065104	0,0065104
0,7	0,0051051	0,0051103	0,0051035	0,0051035
1,0	0	0	0	0

Na Tabela (6) estão representados os valores do momento fletor $M(x)$ desde a Equação (31) para diferentes quantidades de termos na Série de Fourier (considerando $L = q = E = I = 1$).

Tabela 6 – Valores numéricos de momento fletor $M(x)$ para diferentes valores de “x”, numa viga simplesmente apoiada submetida a um carregamento distribuído triangular variando de $x=L$ a $x=0$ utilizando diferentes quantidades de termos na Série de Fourier em comparação com a solução exata.

x	n=1	n=4	n=7	Sol. Exata
0	0	0	0	0
0,2	0,037914	0,0484467	0,0480923	0,047999
0,5	0,0645031	0,0621141	0,062442	0,0625
0,7	0,0521841	0,0458465	0,0455641	0,0455
1,0	0	0	0	0

4. Conclusão

Nesta pesquisa aplicou-se as Séries de Fourier para obter soluções para um carregamento distribuído uniformemente e para dois tipos de carregamentos distribuídos triangulares, considerando que a Série seja uma representação unidimensional da solução ao problema.

Os resultados obtidos após a análise dos três casos de distribuição numa viga simplesmente apoiada, demonstram a eficácia da utilização de Séries de Fourier na análise de elementos estruturais. Ao se considerar a curva da linha elástica de uma viga simplesmente apoiada descrita mediante uma Série de Fourier, é possível encontrar a deflexão correspondente em qualquer ponto da viga.

A quantidade de termos das Séries de Fourier responsáveis pela representação do campo de

carregamento é bastante significativa. Poucos termos nas Séries conferem uma baixa aproximação nos valores numéricos para a carga aplicada. No entanto, apenas poucos termos nas Séries relativas à deflexão e ao campo de momento fletor conseguem fornecer resultados bastante satisfatórios.

Uma aplicação da Série em outros tipos de carregamento, como por exemplo cargas trapezoidais, carregamentos pontuais e outros carregamentos triangulares, além de analisar vigas suportadas por outros tipos de apoio, pode ser considerada em futuros trabalhos.

Outra sugestão é o estudo de vigas bidimensionais, ou placas (lajes), cuja análise seja realizada pelo presente método corresponde a Séries de Fourier Bidimensionais (dupla). A incorporação desse método na Dinâmica também seria proveitosa, para uma análise de frequências naturais de estruturas. A análise da Transformada Discreta de Fourier como método para calcular soluções em vigas unidimensionais e bidimensionais são consequências dos próximos passos do uso do método de Séries de Fourier.

Referências

Arfken, G.B. e Weber, H., 2007. *Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física*. 6th ed. Rio de Janeiro: Elsevier.

Beer, F.P., Johnston, E.R., Dewolf J.T. e Mazurek, D.F., 2011. *Mecânica dos Materiais*. 5th ed. Porto Alegre: AMGH.

Budynas, R.G. e Nisbett, J.K., 2016. *Elementos de máquina de Shigley*. 10th ed. Porto Alegre: AMGH.

Castro, L.M.S., 2001. *Análise de vigas em fundação elástica*. Lisboa, pp.8-19.

Hibbeler, R.C., 2010. *Resistência dos Materiais*. 7th ed. São Paulo: Pearson Hall.

Pereira, C.P.M. e Tomazini, J.E., 2002. *Utilização de séries trigonométricas no estudo de deflexão de vigas*. II Congresso Nacional de Engenharia Mecânica. João Pessoa.

Szilar, R., 2004. *Theories and Applications of Plate Analysis*. 1st ed. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Tang, K.T., 2006. *Mathematical Methods for Engineers and Scientists*, 3. Tacoma: Springer.

Timoshenko, S., 1967. *Resistência dos Materiais*. 3th ed. Rio de Janeiro: Ao livro técnico S. A., pp.147-183.